
T.D. D'INFORMATIQUE PC*

Autour de la méthode de Newton

6 novembre 2003

Le but de ce TD est de décrire une méthode générale, appelée *méthode de Newton* pour la résolution des équations du type

$$f(x) = 0$$

où f est une fonction continue de la variable réelle. Bien que le cadre de cette méthode soit celui des espaces vectoriels de dimension finie (ou plus largement celui des espaces de Banach), nous nous restreindrons au cas des fonctions *réelles* de la variable réelle. Typiquement la fonction f sera donnée par un polynôme à coefficients réels. Tout d'abord, nous décrivons la méthode naïve par *dichotomie*, puis nous rentrerons dans le détail de la méthode de Newton.

1. MÉTHODE PAR DICHOTOMIE

Soit f une fonction continue d'un intervalle réel $I \subset \mathbb{R}$ à valeur dans \mathbb{R} . Nous supposons ici que sont connus deux points $a < b$ dans I , tels que le produit $f(a)f(b)$ soit strictement négatif. Le théorème des valeurs intermédiaires dit qu'il existe au moins une solution de l'équation

$$f(x) = 0$$

que l'on notera α dans l'intervalle $]a, b[$.

La méthode par dichotomie procède comme suit :

Algorithme 1 Méthode par dichotomie

ENTRÉE: la fonction f et les valeurs a et b , un nombre d'itérations n

SORTIE: une approximation de α

Step 1. $x := a$ et $y := b$

Step 2. $z := \frac{x+y}{2}$ [on itère n fois]

if $f(z) = 0$ gagné!

if $f(z)f(x) < 0$ **then** $y := z$

else $x := z$

On montre (*laissé en exercice*) que cet algorithme converge vers l'une des racines α de manière **linéaire** : si z_n désigne le point obtenu à la n -ième itération, on a $|z_n - \alpha| \leq (b-a)2^{-n}$.

Question 1.1 Écrivez une procédure *Dichot* qui effectue l'algorithme ci dessus. Testez la convergence de l'algorithme par exemple sur la fonction $x \mapsto x^2 - 2$. On prendra le soin d'augmenter la précision flottante de MAPLE par défaut à l'aide de la variable d'environnement *Digits*.

Cette méthode n'est pas très efficace car elle nécessite n itérations, *i.e.* essentiellement n évaluations de la fonction f pour obtenir une valeur approchée d'une solution à la précision n . Par contre, cette méthode marche tout le temps à la différence de la méthode de Newton.

2. MÉTHODE DE NEWTON

Nous conservons ici le cadre précédent :

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Nous supposons de plus que f est **dérivable**.

Considérons un point x_0 arbitraire de I . Supposons que l'on puisse définir la suite récurrente $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivante :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Si l'on pose

$$N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

alors $N_f(x_n) = x_{n+1}$. Ainsi, si cette suite est convergente, elle converge nécessairement vers un point fixe de N_f , mais un tel point fixe est une solution de l'équation $f(x) = 0$. Une telle suite s'appelle *itération Newtonienne* partant de x_0 .

Pourquoi construire une telle suite? Car la convergence éventuelle de cette suite est quadratique.

Il existe un certain nombre de conditions suffisantes pour lesquelles cette suite est bien définie et converge. En voici un exemple :

Proposition 2.1 Supposons que f soit de classe C^2 sur I , et que $f'(x_0)$ soit non nul. Posons $h_0 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, $x_1 = x_0 - h_0$ et $J_0 = I \cap [x_1 - |h_0|, x_1 + |h_0|]$. Posons en outre $M = \sup_{x \in J_0} |f''(x)|$.

Si x_0 est tel que

$$2 \left| \frac{f(x_0)M}{(f'(x_0))^2} \right| < 1,$$

alors l'itération partant de x_0 est bien définie, converge vers une solution de $f(x) = 0$ sur J_0 . De plus cette solution est unique dans J_0 .

Enfin la convergence est de type quadratique :

$$|h_{k+1}| \leq \frac{M}{|f'(x_k)|} |h_k|^2.$$

Cette proposition est aussi laissée en exercice (un peu technique, il faut l'avouer...).

Notre problématique est de construire de telles itérations newtoniennes et d'évaluer quantitativement leurs chances de convergence, ou au pire les cas pathologiques qui peuvent se produire.

Question 2.2 Écrivez une procédure, que l'on appellera comme il se doit *Newton* qui prend en paramètre une fonction f , une initialisation x_0 et un nombre d'itération n , fournissant la valeur x_n de la n -ième itération newtonienne partant de x_0 . Testez cette procédure sur la fonction $x \mapsto x^2 - 2$. Comparez avec la méthode par dichotomie.

3. OÙ DES CHOSES AFFREUSES SE PASSENT

Considérons tout d'abord la dépendance par rapport au point de départ x_0 .

Question 3.1 Testez une convergence newtonienne pour une fonction f du type $(x - a)(x - b)$ où, bien entendu, a et b sont réels. Où y a-t-il convergence et vers quoi ?

On voudrait maintenant représenter graphiquement la situation.

Question 3.2 Écrivez une procédure que l'on appellera *Graphnewton* qui prend les mêmes paramètres que la fonction *Newton* et qui dessine la courbe f localement ainsi que les segments joignant pour chaque n le point $(x_n, f(x_n))$ au point $(x_{n+1}, 0)$ et le point $(x_n, 0)$ au point $(x_n, f(x_n))$. Ainsi, pour le polynôme $f(x) = (x + 5)(x + 2)(x - 3)^2$, on obtiendra par exemple le dessin de la figure 1 pour 5 itérations partant du point $x_0 = -3, 7$.

Question 3.3 Peut-on converger vers toutes les racines du polynôme ? Est-ce que l'itération newtonienne pourrait par hasard s'avérer être une suite cyclique ? Déterminer par exemple un x_0 pour lequel l'itération est 2-cyclique, i.e. $x_{n+2} = x_n$. Testez ce qui se passe. Obtenez vous des cycles dans la pratique ?

La morale de ce qui précède est que le comportement de l'itération newtonienne est extrêmement sensible au choix du point de départ. Tous les cas de figure peuvent se produire. En particulier, l'erreur d'arrondi inhérente au calcul peut s'avérer dramatique...

Mais la réalité est bien pire encore !

Considérons maintenant la famille de polynômes suivants :

$$f_\alpha(x) = x^3 + \alpha x + 1,$$

où α est un paramètre réel. Ici nous décidons de fixer le point de départ, ce sera $x_0 = 0$, par contre, la fonction varie en fonction de α . Nous voulons observer l'évolution de l'itération newtonienne en fonction de ce paramètre. Comme x_0 est fixé, nous noterons cette itération $x_n(\alpha)$.

Question 3.4 Nous voulons dessiner le nuage des points de la forme $(x_n(\alpha), \alpha)$ pour n variant dans un certain intervalle. Pour cela, écrivez une procédure que l'on appellera *Listing* qui prend en entrée les données suivantes : deux réels $a < b$ qui correspondront aux bornes de l'intervalle

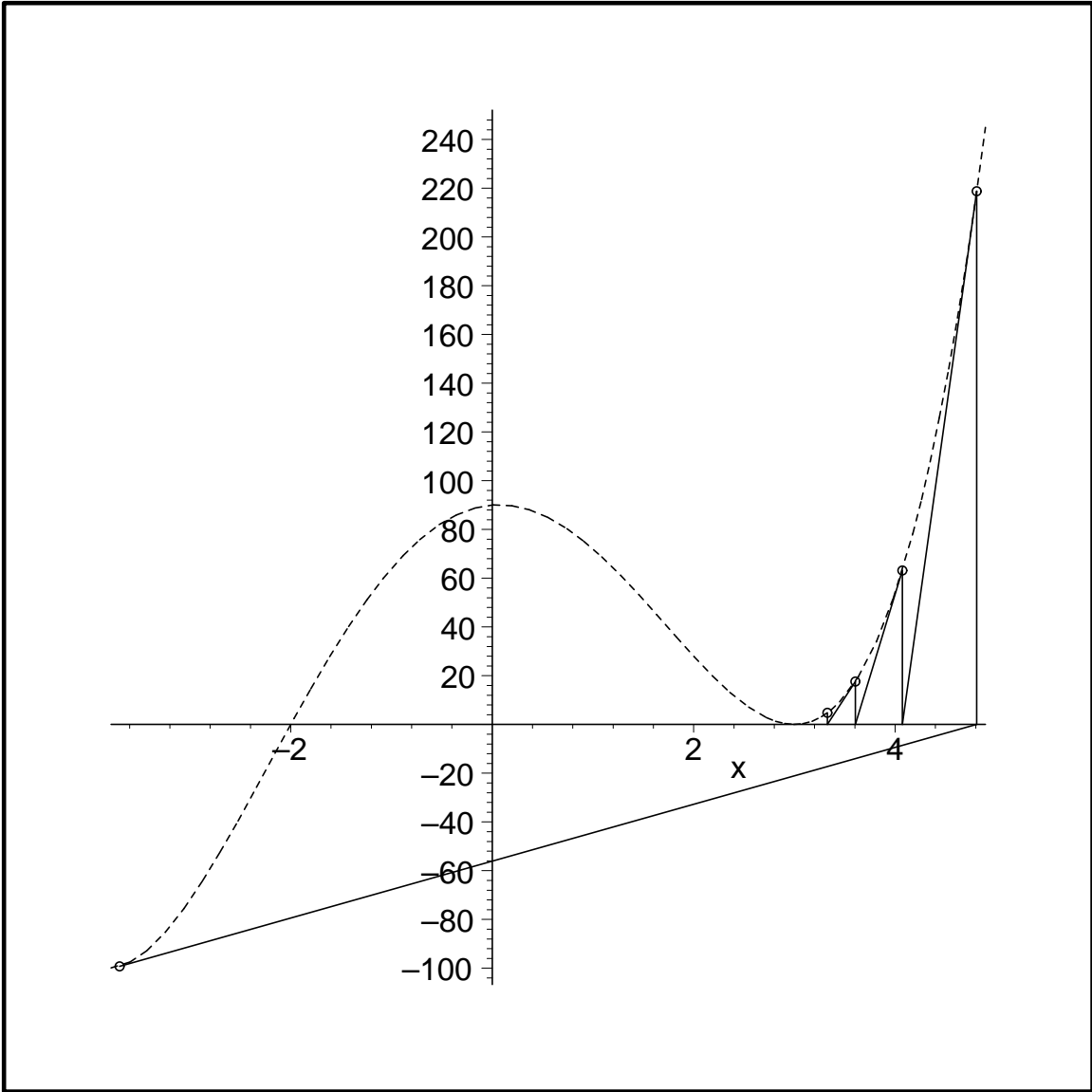


FIG. 1 - Exemple pour $(x + 5)(x + 2)(x - 3)^2$.

dans lequel nous choisirons α , un entier N qui mesurera la précision pour le choix de α , deux entiers $k < l$ qui seront les bornes de l'intervalle dans lequel nous calculerons $x_n(\alpha)$. Plus précisément, les α choisis seront les

$$\alpha_i = a + i \frac{(b - a)}{N},$$

où $i = 0, \dots, N$, et la procédure *Listing* retournera les $x_n(\alpha_i)$ pour $k \leq n \leq l$. Une fois que vous avez cette procédure, affichez le nuage de points. Pour les valeurs $a = -2$ et $b = -1$, vous devriez obtenir quelque chose du type de la figure 2.

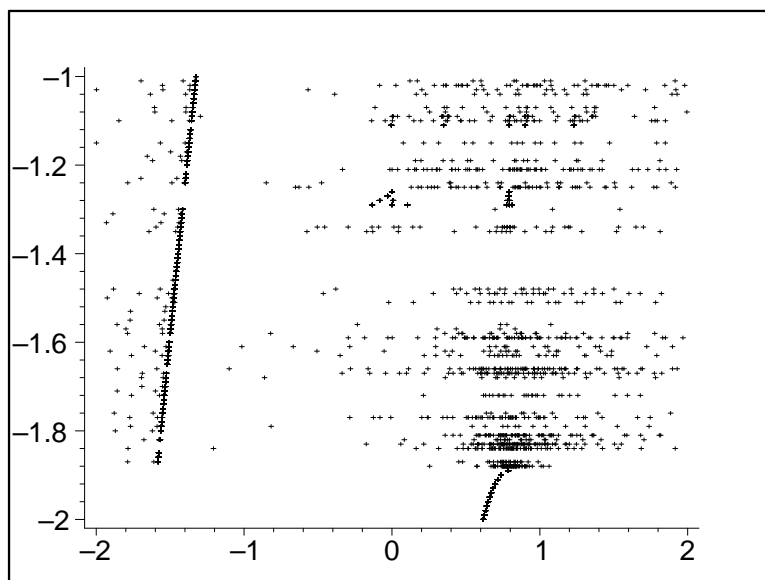


FIG. 2 – Orbites de la méthode de Newton pour $x^3 + \alpha x + 1$.

Quelques commentaires s'imposent. Tout d'abord, cet ensemble du plan est ce que l'on appelle un objet fractale. En effet, si vous opérez un « zoom » sur les parties centrales de l'objet vous obtenez une figure du type 3 à l'infini. Vous pouvez obtenir ce dessin en réalisant une procédure consistant à sélectionner les éléments dans un certain intervalle, *i.e.* à zoomer. On observe une ligne singulière à gauche, c'est simplement la racine réelle en fonction du paramètre α . C'est visiblement une valeur d'adhérence de l'itération newtonienne. On voit aussi que le dessin change brutalement au-dessous d'une certaine ligne horizontale, située vers -1,8. En effet, le polynôme ne possède qu'une seule racine si

$$\alpha > \alpha_0 = -\frac{3}{2} \sqrt[3]{2} \simeq -1,88988,$$

et exactement 3 racines si $\alpha < \alpha_0$.

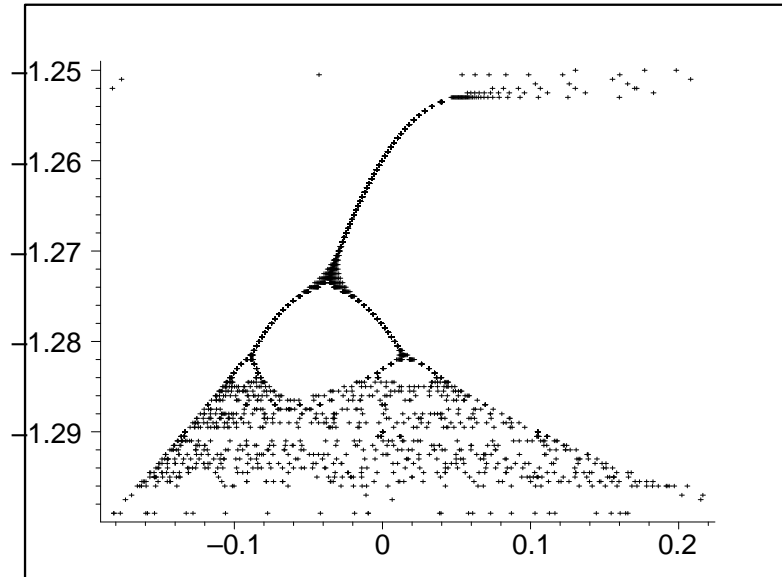


FIG. 3 – Cascade de bifurcations pour $x^3 + \alpha x + 1$.

La *cascade de bifurcation* de la figure 3 a été largement étudiée par Feigenbaum. Elle possède en réalité un caractère universel...