
T.D. D'INFORMATIQUE PC*

Autour de la fonction ζ de Riemann

22 janvier 2004

Le but de ce TD est d'étudier une fonction particulièrement célèbre, la *fonction ζ de Riemann*. Cette étude est aussi un prétexte à la manipulation des séries sous MAPLE et aux calculs de limites. Dans le même temps, nous serons amenés à faire des calculs sur les polynômes à coefficients entiers, ainsi qu'à manipuler quelques opérations arithmétiques élémentaire.

Ce TD est conçu comme un devoir ; il est constitué par une chaîne de petites questions plus ou moins en rapport les unes avec les autres. Vous y répondrez **sur une feuille de calcul MAPLE (mws) présentable comme une copie**.

1. COMMENÇONS PAR QUELQUES OBSERVATIONS

Définition 1 La fonction ζ de Riemann est définie pour tout nombre complexe s de partie réelle strictement supérieure à 1 par la formule :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

- (1) Commençons par écrire la fonction **zeta** sous MAPLE. On utilisera pour cela la fonction **sum**. On observera plusieurs phénomènes singuliers :
 - On calculera cette fonction en réel flottant et en un complexe flottant par exemple. On pourra tester la condition sur la partie réelle strictement supérieure à 1.
 - Calculez $\zeta(2n)$, pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$;
 - Calculez $\zeta(s)$ pour un $s < 1$, puis changez la fonction **sum** en **Sum**. Comment expliqueriez-vous ce phénomène ?
- (2) Calculez la limite de ζ en 1, puis calculez cette limite à droite. On est donc satisfait du résultat.
- (3) Quelle est la limite de ζ en l'infini ?
- (4) Eh, Bien ! Traçons dans la joie le graphe de ζ .
- (5) Continuons en calculant le comportement asymptotique à droite en 1. Calculez la constante qui apparaît à l'ordre 1 avec quelques chiffres significatifs. Quelle est cette constante ? On vérifiera son intuition avec une fonction intégrée de MAPLE.
- (6) Donner un développement asymptotique de ζ en l'infini ?¹

¹Faut-il répondre à cette question ?

- (7) On s'intéresse maintenant au caractère analytique de ζ sur $]1, \infty[$. En d'autres termes, on se pose la question suivante : ζ est-elle développable en série entière en un réel t strictement supérieur à 1. On "*montrera*" (de manière heuristique) que tel est le cas en testant un raisonnement sur un certain nombre de valeurs. Notons qu'il y a bien sûr une démonstration théorique de ce fait en terme de convergence uniforme sur tout compact...
- (8) La fonction ζ était utilisée bien avant Riemann. Elle l'était par exemple par Euler qui la considérait sous la forme du produit, dit *Eulérien* $\prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$. En effet, on montre que :

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}},$$

pour tout s de partie réelle strictement supérieure à 1.

Vérifiez heuristiquement cette égalité.

Euler, considérant cette fonction et essentiellement sa divergence en 1, a ainsi apporté la première preuve analytique de l'infinité des nombres premiers.

2. LES VALEURS DE LA FONCTION ζ AUX ENTIERS STRICTEMENT POSITIFS PAIRS

Nous avons vu dans la question (1) du paragraphe précédent que la fonction ζ admettais des valeurs remarquables en les entiers pairs strictement positifs. Plus précisément, on montre le théorème suivant :

Théorème 1 *Pour tout entier n strictement positif, on a :*

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1} \frac{(2\pi)^{2n} B_{2n}}{(2n)! 2},$$

où les B_k sont des rationnels positifs.

Ces rationnels s'appellent les nombres de Bernoulli. Une manière de les définir, consiste à poser :

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{t^n}{n!}.$$

- (1) Vérifions ce théorème à l'aide de MAPLE.

Il s'agit alors de soulever le point suivant, pour bien comprendre l'enjeu de la situation : nous venons de dire que les $\zeta(2n)$ sont donc égaux à une puissance de π à un facteur près rationnel. Mais comme π est *transcendant* (Lindemann 1882) sur \mathbb{Q} (*i.e.* solution d'aucun polynôme à coefficient dans \mathbb{Q}), les valeurs $\zeta(2n)$ sont donc elles-aussi transcendentes sur \mathbb{Q} . On montre facilement (Apéry, 1978) que $\zeta(3)$ est irrationnel. Il faut attendre 2001 pour que Tanguy Rivoal démontre (en particulier) que les $\zeta(2n + 1)$ sont irrationnels. On est loin de démontrer qu'ils sont aussi transcendents, ce qui est conjecturé...

Dans la suite de ce paragraphe, nous montrons que les $\zeta(2n)$ appartiennent à la droite $\mathbb{Q}\pi^{2n}$. Nous ne tenons donc pas compte ici du théorème annoncé sur les nombres de Bernoulli. Nous calculerons même ces coefficients dans certains cas : pour des petites valeurs de n .

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, introduisons le polynôme suivant :

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} X^{n-k}.$$

Factorisez explicitement ce polynôme. On l'écrira à l'aide de la fonction **binomial**.

Indication : On pourra chercher à évaluer ce polynôme en $\cot^2(\theta)$.

(3) Vérifiez (toujours avec MAPLE) l'inégalité $0 < \frac{1}{x^2} - \cot^2(x) < 1$, pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$. On déduira alors (mathématiquement), pour tout entier $p > 0$, l'inégalité :

$$0 < \frac{1}{x^{2p}} - \cot^{2p}(x) < \frac{p}{x^{2(p-1)}}, \quad \text{pour } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

(4) Intéressons-nous maintenant quelque peu aux *sommes de Newton*. Rappelons que si un polynôme $P(X)$ s'écrit :

$$P(X) = X^n + \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k X^{n-k} = \prod_{k=1}^n (X - X_k),$$

alors les sommes de Newton

$$S_p = \sum_{k=1}^n X_k^p,$$

pour p variant entre 1 et n , vérifient :

$$S_p - a_1 S_{p-1} + \dots + (-1)^{p-1} a_{p-1} S_1 + (-1)^p p a_p = 0,$$

(on pose $a_0 = 1$). Écrivez une procédure que l'on appellera, par hasard, **Newton** qui prend en paramètre n réels a_1, \dots, a_n , un entier p compris entre 1 et n et qui fournit la somme de Newton d'indice p pour ces coefficients.

(5) En déduisant de la question (3) l'inégalité suivante :

$$0 < \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^{2p} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{2p}} - \sum_{k=1}^n \cot^{2p}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) < p \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^{2(p-1)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{2(p-1)}},$$

on peut utiliser la question précédente pour calculer la somme (de Newton) $\sum_{k=1}^n \cot^{2p}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.

Vérifiez qu'à p fixé, cette somme est un polynôme en n de degré $2p$. On calculera par exemple cette somme pour de petites valeurs de p .

(6) Nous pouvons maintenant répondre à la question posée en début de partie. On pourra rendre le calcul explicite pour des petites valeurs de p . On retrouvera alors les valeurs attendues de la fonction ζ .