T.D. D'INFORMATIQUE PC^*

Enveloppes

4 mars 2004

On se propose d'étudier quelques cas particuliers de courbes paramétrées du plan obtenues comme des enveloppes de familles de droites spécifiques : la première famille étudiée est celle constituée par *une échelle glissant le long d'un mur*, la deuxième famille étudiée est celle engendrée par les rayons lumineux provenant d'une source ponctuelle et se réfléchissant sur l'intérieur d'un cercle.

Ne nous inquiétons pas, nous détaillerons tout d'abord précisément la notion d'*enveloppe*.

1. LE GLISSEUR DE L'ÉCHELLE

La situation est la suivante : étant donné $a > 0$, on considère une échelle de longueur a posée sur un mur vertical. Celle-ci fait un angle $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ avec le sol. Quand t varie, les différentes positions de l'échelle décrivent une famille de droites paramétrée par $t \in I = [0, \frac{\pi}{2}]$. On notera cette famille $(\mathcal{D}_t)_{t \in I}$.

- On calculera l'équation de $\mathcal{D}_t$ en fonction de a et t. Puis on écrira le système linéaire paramétré par t donnant l'équation de l'enveloppe. On pourra utiliser à bon escient la fonction convert avec l'option trig (*cf.* l'aide) pour transformer, simplifier des fractions rationnelles trigonométriques.
- On dessinera la courbe obtenue à l'aide de la fonction plot par exemple pour $a = 1$. On prendra bien soin de charger la librairie plots.
- Nous voulons maintenant rendre les choses quelque peu plus générales. Nous écrirons donc une fonction enveloppe qui prend 4 entrées : les 3 fonctions u, v, w et la variable t dont elles dépendent qui définissent la famille de droite

  $$\mathcal{D}_t : u(t)x + v(t)y + w(t) = 0$$

  considérée, et qui sort l'enveloppe de cette famille de droites sous la forme d'un vecteur de deux fonctions réelles en la variable t.
- Il devient alors facile avec notre fonction enveloppe de calculer de manière automatique l'enveloppe de notre famille d'échelles pour tout paramètre a : on écrira une fonction echelle qui prend a en paramètre et qui donne l'enveloppe recherchée.
- Bien, il reste donc à se convaincre *par les yeux* de ce qui se passe : on écrira donc une procédure qui dépend du paramètre a, qui dessine notre enveloppe ainsi qu'un nombre arbitraire $n \in \mathbb{N}^*$ d'échelles réparties de manière significative. On obtiendra donc une procédure echelleplot(a,n), qui renverra un dessin du type de la figure 1.
- Il ne faut jamais s'étonner de finir par tomber sur des polynômes à coefficients entiers en travaillant avec des fonctions trigonométriques. Ainsi, je dis que l'enveloppe obtenue est une courbe d'équation cartésienne :

  $$y^6 + 3x^2y^4 + 3x^4y^2 - 3y^4a^2 + 3y^2a^4 + 21x^2y^2a^2 - 3x^4a^2 - a^6 + 3x^2a^4 + x^6.$$

  On le prouvera bien entendu. On pourra aussi chercher à s'en convaincre sur le dessin. On tracera donc cette courbe. Cette courbe n'étant pas paramétrique, on utilisera la fonction implicitplot. Pourquoi est-ce que le dessin est-il si laid ?

Laissons ici les échelles et étudions les caustiques.

2. CAUSTIQUES DU CERCLE

Une fois que la notion de caustique sera expliqué, nous nous poserons les questions suivantes :

- Premièrement, nous voulons calculer de manière automatique pour un point S du disque fermé de centre 0 de rayon 1, la caustique centrée en ce point. Écrivons donc une procédure qui calcule l'équation de la famille de droites en question et qui fournit son enveloppe à l'aide de la fonction enveloppe. Nous appellerons cette fonction caustique. Elle ne prend donc qu'un seul paramètre, le point S.
- À l'aide de cette procédure, il devient alors facile de dessiner les caustiques en question. On testera pour un point dans l'intérieur du cercle, et pour un point sur le cercle. Dans ce dernier cas, vous devriez obtenir une belle cardioïde.

3. Quelques prolongements amusants

Dans ce qui précède, nous venons de calculer les caustiques *centrées* du cercle. C'est-à-dire, les caustiques issues d'une source lumineuse ponctuelle. Nous pouvons donc nous poser la question d'une source lumineuse à l'infini. Dans ce cas, les rayons entrants sont tous parallèles. Calculez la caustique, et dessinez-là. Ici le paramètre S est donc un vecteur.

Un autre exemple d'enveloppe est constitué par les *développées*. Considérons la conique d'équation paramétrique :

$$t \in [0, 2\pi] \longmapsto M(t) = (a\cos(t), b\sin(t)),$$

où a et b sont deux réels positifs strictement. Nous lui associons, non pas la famille de ses tangentes paramétrées par t, mais la familles des normales à ses tangentes au point $M(t)$. L'enveloppe de cette famille de droite s'appelle la *développée* de la conique en question. De même que dans les questions précédentes, calculez cette famille de droites en fonction de t et calculez l'enveloppe. On trouvera une astroïde.

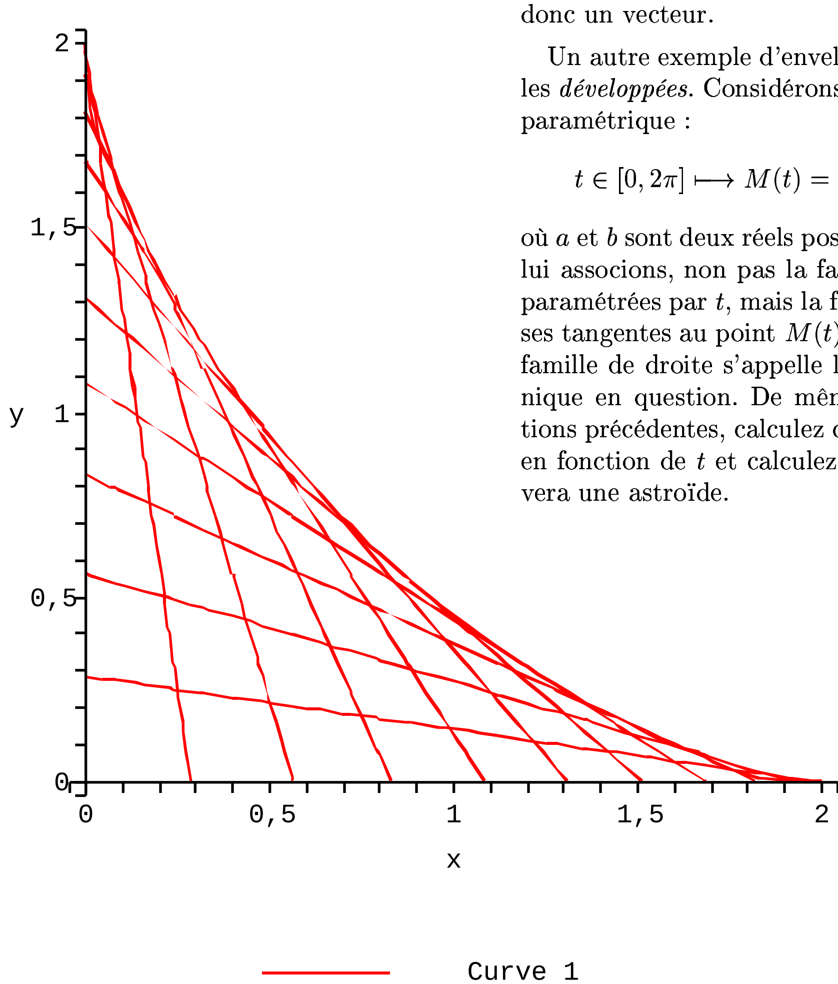

Fig. 1 – Exemple pour $a = 2$ et $n = 10$.